Géométrie dans l'espace

Une fiche de cours de Stéphane Pasquet - Mise à jour : 29 janvier 2021

(https://cours-particuliers-bordeaux.fr) (https://mathweb.fr)

Représentation paramétrique d'une droite

(d) est une droite passant par le point $\mathrm{A}(x_A\,;y_A\,;z_A)$ de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$. Sa représentation paramétrique est :

$$\boxed{\begin{cases}x=x_A+at\\y=y_A+bt\\z=z_A+ct\end{cases},\quad t\in\mathbb{R}}$$

Une droite admet une infinité de représentations paramétriques.

Position relative de deux droites

Soients (d_1) : $\begin{cases}x=3-t\\y=-1+2t\\z=2-t\end{cases},\quad t\in\mathbb{R}$ et (d_2) : $\begin{cases}x=5+2t'\\y=-5+3t'\\z=4t'\end{cases},\quad t'\in\mathbb{R}$ deux droites.

Pour connaître leur position relative :

- **On commence par vérifier si elles sont parallèles ou orthogonales à l'aide de leur vecteur directeur.**

  $\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}$ est le vecteur directeur de (d_1), $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$ est celui de (d_2).

  $\rightarrow$ Ils ne sont pas colinéaires car $\dfrac{-1}{2}\neq\dfrac{2}{3}$.

  $\rightarrow$ Ils sont orthogonaux car $\overrightarrow{u_1}\cdot\overrightarrow{u_2}=-1\times2+2\times3+(-1)\times4=-2+6-4=0$.
- **On regarde ensuite si elles sont sécantes.**

  On résout le système : $\begin{cases}3-t=5+2t'\\-1+2t=-5+3t'\\2-t=4t'\end{cases}$ en résolvant un système formé de deux de ces équations, par exemple :

$$\begin{aligned}\begin{cases}3-t=5+2t'\\2-t=4t'\end{cases} &\iff \begin{cases}2t'+t=-2 & (E_1)\\4t'+t=2 & (E_2)\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}2t'+t=-2 & (E_1)\\2t'=4 & (E_2)\leftarrow(E_2)-(E_1)\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}t'=2 & (E_2)\\4+t=-2 & (E_1)\end{cases}\\
&\iff t=-6\quad,\quad t'=2\end{aligned}$$

  S'il n'y a pas de solutions, les deux droites ne sont pas sécantes.

  S'il y a des solutions, comme ici, on vérifie si la troisième équation est vérifiée :

$$-1+2t=-5+3t' \iff -1+2\times(-6)=-5+3\times2 \iff -13=1$$

  La troisième équation n'est pas vérifiée donc les droites ne sont pas sécantes.

  Si la troisième équation avait été vérifiée, les droites auraient été sécantes.

Donc ici, (d_1) et (d_2) sont orthogonales, sans être perpendiculaires.

Équation cartésienne d'un plan

$$(\mathcal{P})\ :\ ax+by+cz=0 \iff \vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \text{ est un vecteur normal au plan.}$$

Position relative de deux plans

Soient deux plans d'équations cartésiennes respectives : $\begin{cases}(\mathcal{P}_1)\ :\ ax+by+cz=0\\(\mathcal{P}_2)\ :\ a'x+b'y+c'z=0\end{cases}$.

→ $(\mathcal{P}_1)\ //\ (\mathcal{P}_2) \iff \overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ sont colinéaires.
→ $(\mathcal{P}_1)\ \perp\ (\mathcal{P}_2) \iff \overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=0$.

Pour savoir si deux plans sont sécants : on « résout » le système formé par les deux équations cartésiennes en conservant une inconnue et en la considérant comme un paramètre (dans l'exemple suivant, z est conservé) :

$$\begin{aligned}
\begin{cases}2x+3y-z=-5 & (E_1)\\ x+\ y\ \ \ \ \ =-1 & (E_2)\end{cases} &\iff \begin{cases}2x+3y=z-5 & (L_1)\\ 2x+2y=-2 & (L_2)\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}y=z-3 & (L_1)\leftarrow(L_1)-(L_2)\\ x=-1-(z-3) & (L_2)\leftarrow(E_2)\text{ en remplaçant } y\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}y=z-3\\ x=-z+2\end{cases}\quad (z \text{ est considéré comme un paramètre } t)\\
&\iff \begin{cases}x=2-t\\ y=-3+t\\ z=t\end{cases},\quad t\in\mathbb{R}
\end{aligned}$$

L'intersection des deux plans existe : c'est la droite passant par le point $\mathrm{A}(2\,;-3\,;0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\,(-1\,;1\,;1)$.

Intersection d'un plan et d'une droite

On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation $5x+y-z+3=0$ et la droite $\mathcal{D}$ passant par $\mathrm{A}(0\,;1\,;3)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\,(1\,;0\,;3)$.

- **On vérifie d'abord que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$ se coupent en un point.**
  Un vecteur normal à $\mathcal{P}$ est $\vec{n}\,(5\,;1\,;-1)$; donc, $\vec{u}\cdot\vec{n}=5\times1+1\times0+(-1)\times3=2\neq0$ donc $\mathcal{D}$ n'est pas parallèle à $\mathcal{P}$: il y a donc un point unique d'intersection.
  Appelons-le I.

- **Déterminons les coordonnées de I.**
  La représentation paramétrique de $\mathcal{D}$ est :

$$\begin{cases}x=t\\ y=1\\ z=3+3t\end{cases},\quad t\in\mathbb{R}.$$

  Étant donné que I appartient à $\mathcal{D}$, il existe un réel k tel que $\mathrm{I}(k\,;1\,;3k+3)$.
  En substituant les valeurs de x, y et z en fonction de k dans l'équation cartésienne de $\mathcal{P}$, on a :

$$\begin{aligned}
&5k+1-(3+3k)+3=0\\
\iff\ &2k+1=0\\
\iff\ &k=-\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

  Finalement, on a : $\mathrm{I}\left(-\frac{1}{2}\,;1\,;\frac{3}{2}\right)$.

Distance

Entre deux points

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

D'un point à un plan

Soit $\mathcal{P}$ un plan d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$, et soit $\mathrm{A}(x_\mathrm{A}\,;y_\mathrm{A}\,;z_\mathrm{A})$ un point quelconque de l'espace.
La distance du point A au plan $\mathcal{P}$ est :

$$d\,(\mathrm{A}\,;\,\mathcal{P}) = \frac{\mid ax_\mathrm{A} + by_\mathrm{A} + cz_\mathrm{A} + d \mid}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$